

文章编号:1005-3085(2011)03-0315-08

半马尔可夫过程在 $GI/M/1$ 和 $M/G/1$ 排队系统中的应用*

董海玲¹, 侯振挺², 江国朝³

(1- 深圳大学数学与计算科学学院, 深圳 518060; 2- 中南大学数学科学与计算技术学院, 长沙 410075;
3- 哈尔滨工业大学深圳研究生院经管学科部, 深圳 518055)

摘 要: 本文运用齐次可列半马尔可夫过程的向后方程和向前方程, 分别研究了 $GI/M/1$ 和 $M/G/1$ 排队系统队长的瞬时分布. 首先得到了 $GI/M/1$ 队长的转移概率的拉普拉斯变换满足的向后方程组, 然后得到了 $M/G/1$ 队长的转移概率的拉普拉斯变换满足的向前方程组, 所得方程组的系数矩阵都是拟下三角矩阵, 都可以通过迭代法进行求解.

关键词: 齐次可列半马尔可夫过程; $GI/M/1$ 排队系统; $M/G/1$ 排队系统; 向后方程组; 向前方程组

分类号: AMS(2000) 60K15; 60K25

中图分类号: O211.62

文献标识码: A

1 引言

排队系统是运筹学一个重要分支, 目前已经得到了广泛的发展, 形成了一个独立的研究方向, 近几年研究成果参见文献 [1-5] 等, 我国数学家越民义、徐光辉、田乃硕等在排队论方向做了大量的研究工作.

关于 $GI/M/1$ 排队系统和 $M/G/1$ 排队系统的队长问题, 不少学者已经作了大量研究, 但大多是通过嵌入马尔可夫链对它们进行研究, 参见文献 [6,7] 等, 而本文是运用齐次可列半马尔可夫过程的向后方程和向前方程, 分别对 $GI/M/1$ 和 $M/G/1$ 排队系统队长的瞬时分布进行研究. 分别得到了 $GI/M/1$ 队长的转移概率的拉普拉斯变换满足的向后方程组, 和 $M/G/1$ 队长的转移概率的拉普拉斯变换满足的向前方程组. 而且, 由于所得方程组的系数矩阵都是拟下三角矩阵, 所得方程组都可以通过迭代法进行求解.

2 齐次可列半马尔可夫过程的向前向后方程

定义 1^[8] 令 E 为一可数集, $X = \{X(t, \omega), 0 \leq t < \tau\}$ 称为齐次可列半马尔可夫过程, 如果满足:

- 1) $\tau_0 = 0, \tau_1 = \inf\{t > 0, X(t) \neq X(0)\}, \tau_{n+1} = \inf\{t > \tau_n, X(t) \neq X(\tau_n)\}, n > 1, \tau_n \uparrow \tau;$
- 2) $P\{X(\tau_{n+1}) \in A | \mathcal{F}_{\tau_n}\} = P\{X(\tau_{n+1}) \in A | X(\tau_n)\}, n = 0, 1, 2, \dots;$
- 3) $X(t, \omega) = X(\tau_n, \omega), \tau_n \leq t < \tau_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots.$

收稿日期: 2009-10-20. 作者简介: 董海玲 (1981年10月生), 女, 博士, 讲师. 研究方向: 随机过程、排队论、保险.

*基金项目: 国家自然科学基金 (11071258); 国家自然科学基金青年基金 (11001179).

对任意的 $i, j \in E$ 及 $t \in R_+$, 令

$$\begin{aligned} h_{ij}(t) &:= P(X(t) = j, t < \tau_1 | X(0) = i), & P_{ij}(t) &:= P(X(t) = j | X(0) = i), \\ Q_{ij}^{(n)}(t) &:= P(X(\tau_n) = j, \tau_n \leq t | X(0) = i), & Q_i(t) &:= P(\tau_1 \leq t | X(0) = i), \\ G_{ij}(t) &:= P(\tau_{n+1} - \tau_n \leq t | X(\tau_n) = i, X(\tau_{n+1}) = j), & i &\neq j. \end{aligned}$$

对应的 Laplace 变换记为

$$\begin{aligned} h_{ij}(\lambda) &:= \int_0^\infty e^{-\lambda t} h_{ij}(t) dt, & P_{ij}(\lambda) &:= \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{ij}(t) dt, \\ Q_i(\lambda) &:= \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_i(t) dt, & Q_{ij}^{(n)}(\lambda) &:= \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_{ij}^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

定理 1^[9] $\{P_{ij}(t), i, j \in E, t \in R_+\}$ 是下述方程的最小非负解

$$P_{ij}(t) = h_{ij}(t)\delta_{ij} + \sum_{k \neq i} \int_0^t Q_{ik}(ds) P_{kj}(t-s), \quad i, j \in E, \quad \lambda \in R_+. \quad (1)$$

定理 2^[9] $\{P_{ij}(\lambda), i, j \in E, \lambda \in R_+\}$ 是下述方程的最小非负解

$$P_{ij}(\lambda) = h_{ij}(\lambda)\delta_{ij} + \sum_{k \neq i} Q_{ik}(\lambda) P_{kj}(\lambda), \quad i, j \in E, \quad \lambda \in R_+, \quad (2)$$

方程 (1) 和 (2) 都称为齐次可列半马尔可夫过程的向后方程。

定理 3^[9] 如果存在满足等式 $\hat{Q}_{ij}(\lambda) = (h_i(\lambda))^{-1} Q_{ij}(\lambda) h_j(\lambda)$ 的 $\hat{Q}_{ij}(\lambda)$, 则 $\{P_{ij}(\lambda), i, j \in E, \lambda \in R_+\}$ 是下述方程的最小非负解

$$P_{ij}(\lambda) = h_{ij}(\lambda)\delta_{ij} + \sum_{k \neq j} P_{ik}(\lambda) (h_k(\lambda))^{-1} Q_{kj}(\lambda) h_j(\lambda), \quad i, j \in E, \quad \lambda \in R_+, \quad (3)$$

方程 (3) 称为齐次可列半马尔可夫过程的向前方程。

3 将齐次可列半马尔可夫过程的向后方程应用于 GI/M/1 排队系统

定义 2^[10] 所谓 GI/M/1 排队系统, 即顾客逐个到达, 并且到达间隔相互独立, 服从相同的分布 $B(x)$, 按照先到先服务的原则接受服务, 只有一个服务台, 每个顾客的服务时间服从参数为 μ 的指数分布。

设 Y_n 表示第 n 个顾客到达系统时看到系统中的顾客数 (不包括他自己), 易知 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 是一马尔可夫链。设 $\gamma_0 = 0$ 时恰好到达一个顾客, γ_n 为第 n 个顾客到达的时间, 则 $\{(Y_n, \gamma_n), n \geq 0\}$ 构成一马尔可夫更新过程。令 $Y(t) = Y_n, \gamma_n \leq t < \gamma_{n+1}$, 则 $Y(t)$ 为 $\{(Y_n, \gamma_n), n \geq 0\}$ 伴随的齐次可列半马尔可夫过程, 而 $\{Y_n, n \geq 0\}$ 为 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的嵌入马尔可夫链。

由定义 1, 对顾客到达的时间序列 $\{\gamma_n\}$ 进行选择, 去掉拟跳, 取有顾客到达, 过程的状态真正发生转移的时刻为骨架时序列。在不引起误解时, 我们把这个序列也记为: $\{\gamma_n\}$ 。

由半马尔可夫核的定义可得

$$Q_{ij}(t) = P(Y(\gamma_{n+1}) = j, \gamma_{n+1} - \gamma_n \leq t | Y(\gamma_n) = i).$$

当 $j \neq i, j > 0$ 时, 由 $Y(t)$ 的齐次性可得

$$\begin{aligned} q_{i+1-j}(t) &=: Q_{ij}(t) = P(Y(\gamma_{n+1}) = j, \gamma_{n+1} - \gamma_n \leq t | Y(\gamma_n) = i) \\ &= P(Y(\gamma_1) = j, \gamma_1 - 0 \leq t | Y(0) = i) \\ &= \int_0^t P\{[0, x) \text{ 离开了 } i+1-j \text{ 个人}\} P\{\gamma_1 \in dx\} \\ &= \int_0^t \frac{(\mu x)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-\mu x} dB(x), \end{aligned}$$

显然要求 $i+1-j \geq 0$, 即 $j \leq i+1$ 上式才有定义. 当 $j \neq i, j = 0$ 时

$$r_i(t) =: Q_{i0}(t) = Q_i(t) - \sum_{j \neq i, j > 0} Q_{ij}(t) = Q_i(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^{i+1} q_{i+1-j}(t) = B(t) - \sum_{k=0, k \neq 1}^i q_k(t),$$

其中 $Q_i(t) = P(\gamma_1 \leq t | Y(0) = i)$, 因为到达间隔服从相同分布 $B(t)$, 与起点所处状态无关, 所以 $Q_i(t) = B(t)$. 于是 $GI/M/1$ 排队系统的队长 $Y(t)$ 对应的半马尔可夫核为

$$[Q_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & q_0(s) & 0 & 0 & \cdots \\ r_1(s) & 0 & q_0(s) & 0 & \cdots \\ r_2(s) & q_2(s) & 0 & q_0(s) & \cdots \\ r_3(s) & q_3(s) & q_2(s) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

上述结果和文献 [10] 中所得 $GI/M/1$ 排队系统对应的半马尔可夫核的结果是一致的, 只是去掉了拟跳的情形. $Y(t)$ 对应的半马尔可夫核对应的矩阵是拟下三角的, 用向后方程容易求解.

令 $P_{ij}(t) = P(Y(t) = j | Y(0) = i)$, 可得下述定理.

定理 4 对于 $GI/M/1$ 排队系统, $\{P_{ij}(t), i, j \in E, t \in R_+\}$ 是下述方程的最小非负解

$$\begin{cases} P_{0j}(t) = (1 - B(t))\delta_{0j} + \int_0^t P_{1j}(t-s)B(ds), \\ P_{ij}(t) = e^{-\mu x}(1 - B(t))\delta_{ij} + \sum_{m=0, m \neq 1}^{i+1} \int_0^t \frac{(\mu s)^m}{m!} e^{-\mu s} P_{i+1-m,j}(t-s)B(ds). \end{cases}$$

证明 对于 $GI/M/1$ 系统, 可得

$$h_0(t) := h_{00}(t) = P(Y(t) = 0, t < \gamma_1 | Y(0) = 0) = 1 - B(t). \tag{4}$$

当 $i \neq 0$ 时, 有下面的式子成立

$$h_i(t) := h_{ii}(t) = P(Y(t) = j, t < \gamma_1 | Y(0) = i) = e^{-\mu x}(1 - B(t)), \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t Q_{i0}(ds)P_{0j}(t-s) &= \int_0^t r_i(ds)P_{0j}(t-s) \\
&= \int_0^t P_{0j}(t-s)B(ds) - \sum_{k=0, k \neq 1}^i \int_0^t q_k(ds)P_{0j}(t-s) \\
&= \int_0^t \left[\sum_{k=0, k \neq 1}^{i+1} \frac{(\mu s)^k}{k!} e^{-\mu s} - \sum_{k=0, k \neq 1}^i \frac{(\mu s)^k}{k!} e^{-\mu s} \right] P_{0j}(t-s)B(ds) \\
&= \int_0^t \frac{(\mu s)^{i+1}}{(i+1)!} e^{-\mu s} P_{0j}(t-s)B(ds). \tag{6}
\end{aligned}$$

对任意的 i , 下式成立

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1, k \neq i}^{i+1} \int_0^t Q_{ik}(ds)P_{kj}(t-s) &= \sum_{k=1, k \neq i}^{i+1} \int_0^t q_{i+1-k}(ds)P_{kj}(t-s) \\
&= \sum_{m=0, m \neq 1}^i \int_0^t q_m(ds)P_{i+1-m,j}(t-s) \\
&= \sum_{m=0, m \neq 1}^i \int_0^t \frac{(\mu s)^m}{m!} e^{-\mu s} P_{i+1-m,j}(t-s)B(ds). \tag{7}
\end{aligned}$$

由定理 1 和 (4)-(7) 式, 可得本定理成立.

令

$$r_i(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} r_i(dt), \quad i = 1, 2, \dots, \quad q_i(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} q_i(dt), \quad i \in N, \quad i \neq 1.$$

定理 5 对于 $GI/M/1$ 排队系统, $\{P_{ij}(\lambda), i, j \in E, t \in R_+\}$ 是下述方程的最小非负解

$$\left\{ \begin{aligned}
P_{0j}(\lambda) &= h_0(\lambda)\delta_{0j} + q_0(\lambda)P_{1j}(\lambda), \\
P_{1j}(\lambda) &= h_1(\lambda)\delta_{1j} + r_1(\lambda)P_{0j}(\lambda) + q_0(\lambda)P_{2j}(\lambda), \\
P_{2j}(\lambda) &= h_2(\lambda)\delta_{2j} + r_2(\lambda)P_{0j}(\lambda) + q_2(\lambda)P_{1j}(\lambda) + q_0(\lambda)P_{3j}(\lambda), \\
P_{3j}(\lambda) &= h_3(\lambda)\delta_{3j} + r_3(\lambda)P_{0j}(\lambda) + q_3(\lambda)P_{1j}(\lambda) + q_2(\lambda)P_{2j}(\lambda) + q_0(\lambda)P_{4j}(\lambda), \\
&\dots, \\
P_{ij}(\lambda) &= h_i(\lambda)\delta_{ij} + r_i(\lambda)P_{0j}(\lambda) + \sum_{m \neq 1, m=0}^i q_m(\lambda)P_{i+1-m,j}(\lambda), \\
&\dots.
\end{aligned} \right.$$

证明 由定理 2 和 $GI/M/1$ 半马尔可夫核对应的矩阵可得

$$\begin{aligned}
P_{0j}(\lambda) &= h_0(\lambda)\delta_{0j} + \sum_{k \neq 0} Q_{0k}(\lambda)P_{kj}(\lambda) \\
&= h_0(\lambda)\delta_{0j} + \sum_{k \neq 0, k=1}^{0+1} q_{0+1-k}(\lambda)P_{kj}(\lambda) = h_0(\lambda)\delta_{0j} + q_0(\lambda)P_{1j}(\lambda). \tag{8}
\end{aligned}$$

当 $i \neq 0$ 时

$$\begin{aligned}
 P_{ij}(\lambda) &= h_i(\lambda)\delta_{ij} + \sum_{k \neq i} Q_{ik}(\lambda)P_{kj}(\lambda) \\
 &= h_i(\lambda)\delta_{ij} + Q_{i0}(\lambda)P_{0j}(\lambda) + \sum_{k \neq i, k=1}^{i+1} Q_{ik}(\lambda)P_{kj}(\lambda) \\
 &= h_i(\lambda)\delta_{ij} + r_i(\lambda)P_{0j}(\lambda) + \sum_{k \neq i, k=1}^{i+1} q_{i+1-k}(\lambda)P_{kj}(\lambda) \\
 &= h_i(\lambda)\delta_{ij} + r_i(\lambda)P_{0j}(\lambda) + \sum_{m \neq 1, m=0}^i q_m(\lambda)P_{i+1-m,j}(\lambda). \quad (9)
 \end{aligned}$$

由定理 2 和 (8), (9) 式, 可得本定理成立.

由定理 5 可知, $\{P_{ij}(\lambda), i, j \in E, t \in R_+\}$ 满足的向后方程组对应的系数矩阵是拟下三角的, 可以用迭代法进行求解.

4 将齐次可列半马尔可夫过程的向前方程应用于 $M/G/1$ 排队系统

定义 3^[10] 所谓 $M/G/1$ 排队系统, 即顾客逐个到达, 并且到达的间隔服从参数为 λ 的指数分布, 按照先到先服务的原则接受服务, 只有一个服务台, 每个顾客的服务时间独立同分布, 服从分布 $A(x)$.

设 X_n 表示第 n 个顾客离开系统时系统剩余中的顾客数 (不包括离开的这个人), 易知 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一马尔可夫链. 设 $\tau_0 = 0$ 时恰有一个顾客离开, τ_n 为第 n 个顾客离开的时间, 则 $\{(X_n, \tau_n), n \geq 0\}$ 构成一马尔可夫更新过程. 令 $X(t) = X_n, \tau_n \leq t < \tau_{n+1}$, 则 $X(t)$ 为 $\{(X_n, \tau_n), n \geq 0\}$ 的伴随的齐次可列半马尔可夫过程, 而 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的嵌入马尔可夫链.

由定义 1, 对顾客离开的时间序列 $\{\tau_n\}$ 进行选择, 去掉拟跳, 取有顾客离开, 并且过程的状态真正发生转移的时刻为骨架时序列. 在不引起误解时, 我们把这个序列也记为: $\{\tau_n\}$.

由半马尔可夫核的定义可得

$$Q_{ij}(t) = P(X(\tau_{n+1}) = j, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t | X(\tau_n) = i).$$

当 $j \neq i, i > 0$ 时, 由 $X(t)$ 的齐次性可得

$$\begin{aligned}
 q_{j-i+1}(t) &=: Q_{ij}(t) = P(X(\tau_{n+1}) = j, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t | X(\tau_n) = i) \\
 &= P(X(\tau_1) = j, \tau_1 - 0 \leq t | X(0) = i) \\
 &= \int_0^t \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} e^{-\lambda x} dA(x),
 \end{aligned}$$

显然要求 $j-i+1 \geq 0$, 即 $i \leq j+1$ 上式才有定义.

当 $j \neq i, i = 0$ 时

$$p_j(t) =: Q_{0j}(t) = P(X(\tau_1) = j, \tau_1 - 0 \leq t | X(0) = 0) = \int_0^t q_j(t-x)\lambda e^{-\lambda x} dx.$$

于是 $M/G/1$ 排队系统对应的半马尔可夫核为

$$[Q_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & p_1(s) & p_2(s) & p_3(s) & \cdots \\ q_0(s) & 0 & q_2(s) & q_3(s) & \cdots \\ 0 & q_0(s) & 0 & q_2(s) & \cdots \\ 0 & 0 & q_0(s) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

上述结果和文献 [10] 中所得 $M/G/1$ 排队系统对应的半马尔可夫核的结果是一致的, 只是去掉了拟跳的情形. $M/G/1$ 的半马尔可夫核对应的矩阵是拟上三角的, 这种情形下, 用向前方程比向后方程更容易求解.

令

$$P_{ij}(t) = P(X(t) = j | X(0) = i), \quad P_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{ij}(t) dt,$$

$$p_i(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_i(dt), \quad i = 1, 2, \dots, \quad q_i(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} q_i(dt), \quad i \in N, \quad i \neq 1.$$

定理 6 对于 $M/G/1$ 排队系统, $\{P_{ij}(\lambda), i, j \in E, t \in R_+\}$ 是下述方程的最小非负解

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{i0}(\lambda) = h_0(\lambda)\delta_{i0} + P_{i1}(\lambda)(h_1(\lambda))^{-1}q_0(\lambda)h_0(\lambda), \\ P_{i1}(\lambda) = h_1(\lambda)\delta_{i1} + P_{i0}(\lambda)(h_0(\lambda))^{-1}p_1(\lambda)h_1(\lambda) + P_{i2}(\lambda)(h_2(\lambda))^{-1}q_0(\lambda)h_1(\lambda), \\ P_{i2}(\lambda) = h_2(\lambda)\delta_{i2} + P_{i0}(\lambda)(h_0(\lambda))^{-1}p_2(\lambda)h_2(\lambda) + P_{i1}(\lambda)(h_1(\lambda))^{-1}q_2(\lambda)h_2(\lambda) \\ \quad + P_{i3}(\lambda)(h_3(\lambda))^{-1}q_0(\lambda)h_2(\lambda), \\ \dots, \\ P_{ij}(\lambda) = h_j(\lambda)\delta_{ij} + P_{i0}(\lambda)(h_0(\lambda))^{-1}p_j(\lambda)h_j(\lambda) \\ \quad + \sum_{m=0, m \neq 1}^j P_{i, j+1-m}(\lambda)(h_{j+1-m}(\lambda))^{-1}q_m(\lambda)h_j(\lambda), \\ \dots \end{array} \right.$$

证明 由定理 3 和 $M/G/1$ 半马尔可夫核对应的矩阵可得

$$\begin{aligned} P_{i0}(\lambda) &= h_0(\lambda)\delta_{i0} + \sum_{k \neq 0} P_{ik}(\lambda)(h_k(\lambda))^{-1}Q_{k0}(\lambda)h_0(\lambda) \\ &= h_0(\lambda)\delta_{i0} + \sum_{k \neq 0, k=1}^{0+1} P_{ik}(\lambda)(h_k(\lambda))^{-1}q_{0-k+1}(\lambda)h_0(\lambda) \\ &= h_0(\lambda)\delta_{i0} + P_{i1}(\lambda)(h_1(\lambda))^{-1}q_0(\lambda)h_0(\lambda). \end{aligned} \quad (10)$$

当 $j \neq 0$ 时

$$\begin{aligned}
 P_{ij}(\lambda) &= h_j(\lambda)\delta_{ij} + \sum_{k \neq j} P_{ik}(\lambda)(h_k(\lambda))^{-1}Q_{kj}(\lambda)h_j(\lambda) \\
 &= h_j(\lambda)\delta_{ij} + P_{i0}(\lambda)(h_0(\lambda))^{-1}Q_{0j}(\lambda)h_j(\lambda) + \sum_{k \neq j, k=1}^{j+1} P_{ik}(\lambda)(h_k(\lambda))^{-1}Q_{kj}(\lambda)h_j(\lambda) \\
 &= h_j(\lambda)\delta_{ij} + P_{i0}(\lambda)(h_0(\lambda))^{-1}p_j(\lambda)h_j(\lambda) + \sum_{k \neq j, k=1}^{j+1} P_{ik}(\lambda)(h_k(\lambda))^{-1}q_{j-k+1}(\lambda)h_j(\lambda) \\
 &= h_j(\lambda)\delta_{ij} + P_{i0}(\lambda)(h_0(\lambda))^{-1}p_j(\lambda)h_j(\lambda) \\
 &\quad + \sum_{m \neq 1, m=0}^j P_{i, j+1-m}(\lambda)(h_{j+1-m}(\lambda))^{-1}q_m(\lambda)h_j(\lambda).
 \end{aligned} \tag{11}$$

于是, 由定理 3 和 (10), (11) 式, 可得本定理成立.

由定理 6 可知, $\{P_{ij}(\lambda), i, j \in E, t \in R_+\}$ 满足的向前方程组对应的系数矩阵是拟下三角的, 可以选用代法进行求解, 而它满足的向后方程组对应的系数矩阵是拟上三角的, 不利于求解, 这体现了向前方程组的应用价值.

参考文献:

- [1] Ramsay C M. Exact waiting time and queue size distributions for equilibrium $M/G/1$ queues with Pareto service[J]. Queueing Systems, 2007, 57(4): 147-155
- [2] Tang J S, Zhao Y Q. Stationary tail asymptotics of a tandem queue with feedback[J]. Annals of Operations Research, 2008, 160(1): 173-189
- [3] Chen H Y, Li J H, Tian N S. The $GI/M/1$ queue with phase-type working vacations and vacation interruption[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2009, 30(1-2): 121-141
- [4] 冯建英, 吴云江. 带关闭期的随机 N -策略的 $M/G/1$ 排队系统[J]. 工程数学学报, 2009, 26(3): 466-474
Feng J Y, Wu Y J. The $M/G/1$ queue under vacation policies with closedown time and the random N -policy[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(3): 466-474
- [5] 唐应辉, 等. 推广的 (t, T) 策略下 $M/G/1$ 排队系统队长分布的递推解及最优策略[J]. 工程数学学报, 2009, 26(2): 251-259
Tang Y H, et al. The optimum policy and recursion solution of the queue-length distribution in $M/G/1$ queue system with generalized (t, T) policy[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(2): 251-259
- [6] Kendall D G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the methods of the embedded Markov chain[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1953, 24: 338-354
- [7] Liu Y Y, Hou Z T. Explicit convergence rates of the embedded $M/G/1$ queue[J]. Acta Mathematica Sinica, 2007, 23(7): 1289-1296
- [8] Cinlar E. Introduction to Stochastic Processes[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1975
- [9] 董海玲. 马尔可夫骨架过程极限理论[D]. 长沙: 中南大学, 2008
Dong H L. Limit Distribution of Markov Skeleton Processes[D]. Changsha: Central South University, 2008
- [10] 邓永录, 梁之舜. 随机点过程及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1992
Deng Y L, Liang Z S. Stochastic Point Processes and Their Application[M]. Beijing: Science Press, 1992

The Application of Semi-Markov Processes in $GI/M/1$ and $M/G/1$ Queuing Systems

DONG Hai-ling¹, HOU Zhen-ting², JIANG Guo-chao³

(1- School of Mathematics and Computer Science, Shenzhen University, Shenzhen 518060;

2- School of Mathematics, Central South University, Changsha 410075;

3- Department of Economics and Management, HIT Shenzhen Graduate School, Shenzhen 518055)

Abstract: In this paper, the backward equations and forward equations of homogeneous denumerable semi-Markov processes are used to study the instantaneous distribution of queue lengths of $GI/M/1$ and $M/G/1$ queuing systems, respectively. For the $GI/M/1$ queuing system, the backward equations of the Laplace transform of the transition probability of its queue length are obtained. For the $M/G/1$ queuing system, the forward equations of the Laplace transform of the transition probability of its queue length are obtained. These backward equations and forward equations, whose coefficient matrices are quasi-triangular matrices, can be easily solved by using the iterative method.

Keywords: homogeneous denumerable semi-Markov processes; $GI/M/1$ queuing system; $M/G/1$ queuing system; backward equations; forward equations

Received: 20 Oct 2009. **Accepted:** 09 Apr 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11071258); the National Natural Science Foundation for Young Scholars of China (11001179).